Μάθημα 35ο

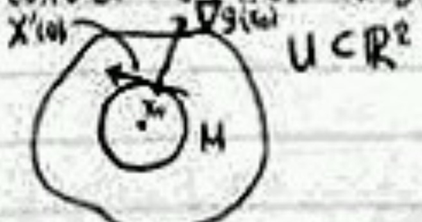
19/12/14

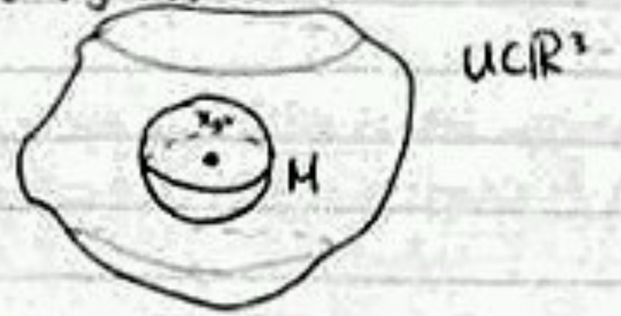
ΘΕΩΡΗΜΑ Πολλαπλασιαστών Lagrange:

$f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^r$, $r<n$, $f \in C^1(U)$, $g \in C^1(U, \mathbb{R}^r)$

<u>Αν</u> η f έχει τοπικό ακρότατο υπό τη συνθήκη $g(x)=0$ (δηλ. η $f|_M$, $M=\{x \in U : g(x)=0\}$) στο x_0 και $Dg(x_0)$ είναι βαθμίδας r, τότε $\exists\ \bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)^T$ έτσι ώστε $\nabla f(x_0) = \bar{\lambda}^T Dg(x_0)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στη γενική περίπτωση έχουμε r συνθήκες $g_1(x)=0, \dots, g_r(x)=0$, πολύ συχνά $r=1$, δηλαδή έχουμε μόνο μια πραγματική συνάρτηση $g: U \to \mathbb{R}$ και τότε υπάρχει ένας πολλαπλασιαστής Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει $\nabla f(x_0) = \nabla g(x_0) \cdot \lambda$ με $\nabla g(x_0) \neq 0$.





- Γιατί ισχύει το Θ. Πολλαπλ. Lagrange;

Ιδέα: Έστω ότι η $f|_M$ έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in M \Rightarrow \forall$ καμπύλη $t \mapsto x(t) \in M$ με $x(0)=x_0$ η $t \mapsto f(x(t)) \in \mathbb{R}$ θα έχει τοπικό ακρότατο στο $t=0 \Rightarrow$

$\rightarrow$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} f(x(t))\Big|_{t=0}}_{} = 0$$

$$= \nabla f(\underbrace{x(0)}_{=x_0}) \cdot \overset{\text{εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης}}{x'(0)}$$

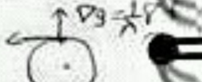
$\Rightarrow \nabla f(x_0) \perp$ στο εφαπτόμενο διάνυσμα $x'(0)$ στο σημείο $x_0 \in M$, κάθε καμπύλης με τιμές μέσα στο M που περνάει από το x_0

$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$M = S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}$

$\Rightarrow$ Αν το M είναι μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ ή μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ (γράφημα μιας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών), τότε $\nabla f(x_0)$ είναι παράλληλη (δηλαδή βαθμωτό πολλαπλάσιο) στο κάθετο διάνυσμα $\nabla g(x_0)$ πάνω στην M στο σημείο x_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



α) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} \Rightarrow g(x,y) = x^2+y^2-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \nabla g(x,y) = 2(x,y) \perp (-y,x)$ εφαπτόμενο διάνυσμα στην M, αφού αν $M = \{(x(t),y(t)) = (\cos t, \sin t),\ t \in \mathbb{R}\}$ με $(x'(t), y'(t)) = (-\sin t, \cos t) = (-y(t), x(t))$

β) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = z - f(x,y) = 0\} = \Gamma_f$.

$\Rightarrow$ εφαπτόμενο επίπεδο στο $(x_0,y_0,z_0) \in M$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + (x-x_0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix} + (y-y_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ κάθετο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \partial f/\partial x \\ 0 & 1 & \partial f/\partial y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ 1 \end{pmatrix} \quad x,y \in \mathbb{R}$$

και $\nabla g(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ Βρείτε το σημείο του επιπέδου $z=x+y$ με την μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση από το $(1,0,0)\in\mathbb{R}^3$

ΛΥΣΗ Θέλουμε να βρούμε το σημείο ολικού ελαχίστου της συνάρτησης
$f(x,y,z)=\|(x,y,z)-(1,0,0)\|^2=(x-1)^2+y^2+z^2,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$
υπό τη συνθήκη $g(x,y,z)=z-x-y=0$ {$x\mapsto x^2$ γν. αύξουσα
(δηλ. το σημείο ολικού ελαχίστου της $f|_{\{z=x+y\}}$)

(1η μέθοδος αντικαθιστώ $z=x+y$ στο $f(x,y,z)$ και προσπαθώ να βρω το σημείο ολικού ελαχίστου της $h(x,y)=f(x,y,x+y)=(x-1)^2+y^2+(x+y)^2,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$)

(2η μέθοδος χρησιμοποιώ πολλαπλασιαστές Lagrange:

$$F(x,y,z,\lambda)=\lambda\underbrace{g(x,y,z)}_{=z-x-y}-\underbrace{f(x,y,z)}_{=(x-1)^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow\nabla F(x,y,z,\lambda)=(-\lambda-2(x-1),\ -\lambda-2y,\ \lambda-2z,\ z-x-y)=(0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)=\lambda,\ -2y=\lambda,\ 2z=\lambda,\ z-x-y=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-\lambda/2\\ y=-\lambda/2\\ z=\lambda/2\\ \lambda/2(1+1+1)=1\end{cases}\Rightarrow(x,y,z,\lambda)=\frac{1}{3}(2,-1,1,2)$$

Επίσης $\nabla g(x,y,z)=(-1,-1,1)\neq(0,0,0)$
(δηλ. η $\nabla g(x,y,z)$ έχει "βαθμίδα 1" $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$)
Άρα (Θ. Πολλαπλασιαστών Lagrange) το μοναδικό υποψήφιο τοπικό ακρότατο της f υπό τη συνθήκη $g=0$ είναι στο σημείο $\frac{1}{3}(2,-1,1)$ με
$f\left(\frac{1}{3}(2,-1,1)\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Το σημείο που βρήκαμε είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f περιορισμένης στο $z=x+y$, επειδή το επίπεδο $z=x+y$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$(;) το σημείο $\{(1,0,0)\}\subset\mathbb{R}^3$ είναι συμπαγές (;) και ισχύει η εξής πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $\emptyset\neq A,B\subset\mathbb{R}^n$, A συμπαγές, B κλειστό. Τότε $\exists\,\xi\in A,\ \eta\in B$
$\|\xi-\eta\|\leq\|x-y\|,\ \forall x\in A,\ y\in B$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $d := \inf\{\|x-y\| \ x\in A,\ y\in B\} \geq 0$, δηλαδή $\exists (x_\nu)\subset A, (y_\nu)\subset B$ (ορισμός του inf)

$\|x_\nu - y_\nu\| \to d$ ⊛ Αφού το A είναι συμπαγές $\exists (x_{k_\nu})\subset(x_\nu)$

$x_{k_\nu} \to \xi\in A$ (ορισμός) $\to \|x_{k_\nu}\| \to \|\xi\|$ (συνέχεια της $\underset{\mathbb{R}^n}{x} \mapsto \|x\|\in\mathbb{R}$)

Επίσης $(y_{k_\nu})\subset(y_\nu)$ είναι φραγμένη, αφού $\|y_{k_\nu}\| \leq \|x_{k_\nu} - y_{k_\nu}\| + \|x_{k_\nu}\|$

$\Rightarrow$ Bolzano-Weirstrass $\exists (y_{k_{\ell_\nu}}) \subset (y_{k_\nu})$: $y_{k_{\ell_\nu}} \to \eta\in B$ (αφού Β κλειστό)

$\Rightarrow x_{k_{\ell_\nu}} \to \xi\in A$, $y_{k_{\ell_\nu}} \to \eta\in B$

$\Rightarrow \|x_{k_{\ell_\nu}} - y_{k_{\ell_\nu}}\| \to \|\xi-\eta\|$

$\underset{⊛}{\Rightarrow} d = \|\xi - \eta\|$

ΑΣΚΗΣΗ: Να δείξουμε ότι το επίπεδο $z = ax+by$, $(a,b\in\mathbb{R})$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

ΛΥΣΗ: Θέλουμε να δείξουμε ότι το $M = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = z-ax-by = 0\}$ είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^3$, δηλαδή $\forall (x_\nu,y_\nu,z_\nu)\in M$ $\forall\nu\in\mathbb{N}$ με $(x_\nu,y_\nu,z_\nu)\xrightarrow[\nu\to\infty]{} (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$\xrightarrow{g \text{ συνεχής}} \underbrace{g(x_\nu,y_\nu,z_\nu)}_{=0} \longrightarrow \underbrace{g(x,y,z)}_{=0}$, άρα $(x,y,z)\in M$

ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της $f(x,y,z) = 5x+y-3z$ πάνω στην τομή του επιπέδου $x+y+z=0$ με τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=1$.

ΛΥΣΗ: Θέλουμε να βρούμε τα τοπικά ακρότατα της f υπό την συνθήκη

$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ με παράγωγο $Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$

βαθμίδας 2, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{c(1,1,1)\ c\in\mathbb{R}\}$ και άρα $\forall (x,y,z)\in M =$

$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Επίσης $f\in C^1(\mathbb{R}^3)$, $g\in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ άρα μπορώ να χρησιμοποιήσω το:

Θ. Πολλαπλασιαστών Lagrange (το οποίο θα μου δώσει όλα τα υποψήφια σημεία τοπικών ακροτάτων)

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = (\lambda_1\ \lambda_2)\underbrace{g(x,y,z)}_{=\begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}} - f(x,y,z)$$

$= \lambda_1(x,y,z) + \lambda_2(x^2+y^2+z^2-1) - (5x+y-3z)$

$\Rightarrow \nabla F(\ \ ) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 x - 5,\ \lambda_1 + 2\lambda_2 y - 1,\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3,\ x+y+z,\ x^2+y^2+z^2-1) =$
$= (0,0,0,0,0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 x - 5 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 y - 1 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3\lambda_1 - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ άρα } x = \frac{2}{\lambda_2},\ y = 0,\ z = \frac{-2}{\lambda_2}$$

$\Rightarrow \frac{4}{\lambda_2^2} + 0 + \frac{4}{\lambda_2^2} = 1 \Leftrightarrow \lambda_2^2 = 8 \Leftrightarrow \lambda_2 = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ υποψήφια σημεία τοπικών ακροτάτων $(x,y,z) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ και
$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm 4\sqrt{2}$

Αφού M συμπαγές ($g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ είναι συνεχής ∇), f συνεχής $\Rightarrow \exists$ ολικό μέγιστο και ελάχιστο

ΘΕΜΑ: Έστω $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη, $g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
Να δείξουμε ότι $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = 0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

ΛΥΣΗ: Έστω $\underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}}_{=\bar{f}} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix}$ [δηλ. $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$]

Άρα $g = f \circ \bar{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \Rightarrow Dg(x,y,z) \overset{\text{κανόνας αλυσίδας}}{=} \underbrace{Df(\bar{f}(x,y,z))}_{=\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w}\right)} D\bar{f}(x,y,z) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial(x-y)}{\partial x} & \frac{\partial(x-y)}{\partial y} & \frac{\partial(x-y)}{\partial z} \\ \frac{\partial(y-z)}{\partial x} & \frac{\partial(y-z)}{\partial y} & \frac{\partial(y-z)}{\partial z} \\ \frac{\partial(z-x)}{\partial x} & \frac{\partial(z-x)}{\partial y} & \frac{\partial(z-x)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w},\ -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},\ -\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\right) = \nabla g(x,y,z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = \cancel{\frac{\partial f}{\partial u}} - \cancel{\frac{\partial f}{\partial w}} - \cancel{\frac{\partial f}{\partial u}} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial v}} - \cancel{\frac{\partial f}{\partial v}} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial w}} = 0$$

ΘΕΜΑ: Να δείξουμε ότι η εξίσωση $x^2 - \sin y + y^4 = 1$ έχει κοντά στο $x=1$ μια μοναδική διαφορίσιμη λύση με $y(1)=0$ και υπολογίστε την $y'(1)$.

ΛΥΣΗ: $F(x,y) = x^2 - \sin y + y^4 - 1 = 0$

Θέλω να βρω $y(x)$ με $F(x,y(x)) = 0$, $\forall x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

$x_0 = 1$, $y_0 = y(1) = 0$: $F(x_0, y_0) = 0$ ✓

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = -\cos y_0 + 4y_0^3 \underset{y_0=0}{=} -\cos 0 = -1 \neq 0.$$

Επίσης $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \xRightarrow{\text{Θ.Π.Σ}} (\exists \varepsilon > 0)\ \forall x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

$\exists!\ y(x) \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $F(x,y(x)) = 0$ με $y \in C^1(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

και $$y'(1) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{-\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} = \frac{\partial F}{\partial x}(1,0) = 3x^2\Big|_{x=1} = 3$$